



INTRODUÇÃO À RADIAÇÃO ELECTROMAGNÉTICA

**Estudo do campo de radiação emitido por uma
carga eléctrica acelerada**

Resumo

Nestes apontamentos faz-se uma breve introdução ao estudo da radiação electromagnética. Explica-se como a existência de um valor finito máximo para a velocidade cósmica leva o campo electrostático radial, que varia com o inverso do quadrado da distância, a dar origem (na zona distante de uma carga eléctrica acelerada) a um campo de radiação que – ao contrário do campo electrostático – é transversal e varia inversamente com a distância.

Prof. Carlos R. Paiva

Julho de 2015

1. Introdução

Nestes apontamentos vai-se centrar a atenção sobre o campo electromagnético provocado por uma carga eléctrica Q , animada de movimento linear, com velocidade v e aceleração a . A carga encontra-se no vácuo e, portanto, as relações constitutivas são

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

em que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ e onde

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}.$$

Neste estudo é relevante começar por formular o segundo postulado de Einstein sobre a teoria da relatividade restrita: a luz, enquanto fenómeno electromagnético, propaga-se no vácuo com o valor universal $c < \infty$ em todos os referenciais de inércia e de forma independente da fonte que a emitiu. Desde 1983 que se fixou (por convenção) esse valor numérico, de forma exacta, em

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Frequentemente, para efeitos práticos, é costume usar o seguinte valor aproximado:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Sabemos, hoje, que o valor (absoluto) mínimo que uma carga eléctrica livre pode assumir é o valor correspondente à carga do electrão e^- :

$$e = 1.60217657 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Note-se, portanto, que

$$Q(e^-) = -e.$$

Já a anti-partícula correspondente ao electrão (o positrão e^+) tem uma carga positiva:

$$Q(e^+) = +e.$$

Um protão tem exactamente esse mesmo valor da carga – assim garantindo que o átomo de hidrogénio é electricamente neutro. Note-se que o electrão é um leptão, i.e., uma partícula elementar que não está sujeita à interação nuclear forte. Porém, um protão é um hádrão composto por três quarks – é aquilo que se designa por barião, i.e., um hádrão composto por dois quarks *up* (u) e um quark *down* (d):

$$p^+ = [uud].$$

NOTA – Designa-se por hádrão uma partícula compósita (i.e., não se trata de uma partícula elementar), constituída por quarks ligados entre si através da interacção nuclear forte.

A carga eléctrica de um quark u é $+2e/3$ enquanto que a carga eléctrica de um quark d é $-e/3$. Porém, os quarks não podem existir isoladamente. A carga do protão corresponde à carga do electrão (em valor absoluto):

$$Q(p^+) = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) e = -Q(e^-) = +e.$$

Todavia, tudo o que se segue é descrito no contexto não-quântico da electrodinâmica clássica. Além disso, não serão necessárias considerações específicas da teoria da relatividade. Com efeito, vamos considerar que, no nosso estudo, se tem sempre

$$\beta = \frac{v}{c} \ll 1.$$

Neste sentido estes apontamentos são prolegómenos para o estudo que se segue – o estudo das antenas.

Porém, a conclusão fundamental destes apontamentos radica na essência da teoria da relatividade restrita – no sentido em que a velocidade das ondas electromagnéticas (no vácuo) é dada pela constante universal

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

qualquer que seja o sistema de coordenadas (inercial) em que estas ondas são medidas e, portanto, de forma independente do estado cinemático (de repouso ou movimento) da respectiva fonte radiativa.

Quais são, então, os objectivos destes apontamentos?

- **Em primeiro lugar:** mostrar que é necessário que uma carga eléctrica tenha aceleração para que esta emita radiação electromagnética.
- **Em segundo lugar:** mostrar que o campo de radiação, produzido por uma carga eléctrica acelerada, é transversal e varia inversamente com a distância R à carga.

No fundo, pretende-se mostrar que tudo se passa como se a carga fosse pontual: num sistema de coordenadas esféricas centrado na carga, o campo de radiação é transversal (i.e., perpendicular à linha que une o centro onde a carga se encontra e o ponto de observação) e a sua amplitude varia com $1/R$. Ou seja: tudo se passa, na zona distante, como se toda a radiação fosse emitida por uma antena isotrópica (pontual), centrada na origem, radiando uma potência total P_{rad} . Não havendo perdas no meio onde as ondas esféricas se propagam, a densidade do fluxo de potência Σ_0 da radiação electromagnética (em unidades SI de $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) proveniente de uma fonte isotrópica é, então, dada (a uma distância R) por

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{densidade do} \\ \text{fluxo de potência} \\ \text{da fonte isotrópica} \end{array}} \mapsto \boxed{\Sigma_0 = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi R^2}},$$

uma vez que a área da superfície esférica, de raio R , é precisamente $A = 4\pi R^2$. Sendo S o valor instantâneo do vector de Poynting e $\langle S \rangle$ o valor médio (ao longo de um ciclo temporal de oscilação), tem-se (para ondas planas e monocromáticas)

$$\boxed{\Sigma_0 = \langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0}},$$

em que E_0 representa a amplitude do campo de radiação e η_0 é a impedância intrínseca do vácuo, i.e., tem-se

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c\mu_0 = \frac{1}{c\epsilon_0}.$$

Em valores aproximados é

$$\eta_0 \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega.$$

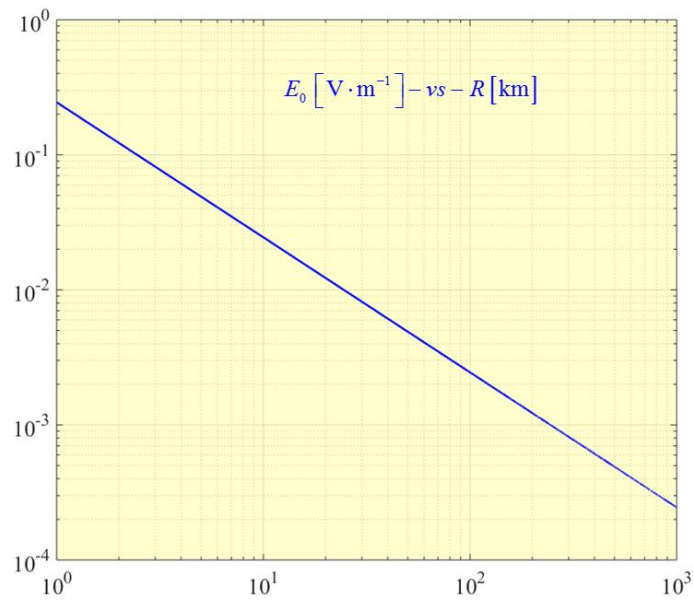
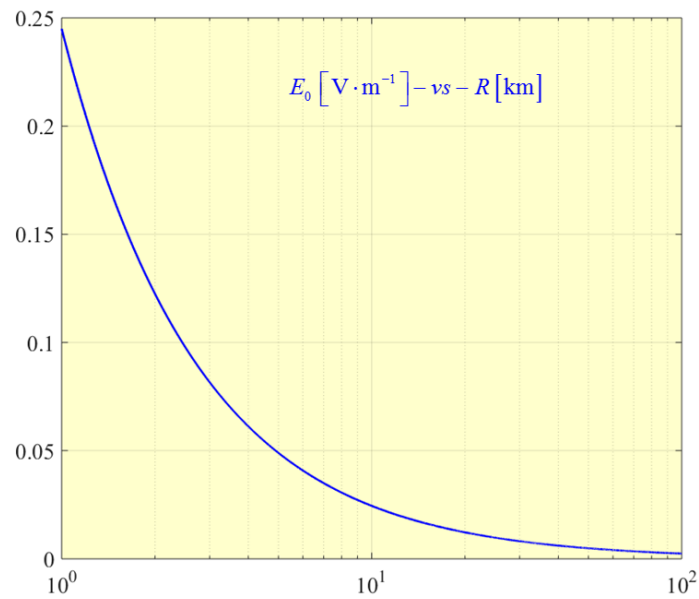
Portanto, o segundo objectivo destes apontamentos pode resumir-se na seguinte expressão:

$$\boxed{E_0 = \frac{V_0}{R} \propto \frac{1}{R}}.$$

E, assim, deverá ter-se, ainda,

$$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{\eta_0 P_{\text{rad}}}{2\pi}}}.$$

Para $P_{\text{rad}} = 1 \text{ kW}$ vem $V_0 = 244.95 \text{ V}$, a que corresponde um campo radiado: (i) $E_0 = 0.25 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, para $R = 1 \text{ km}$; (ii) $E_0 = 24.5 \text{ mV} \cdot \text{m}^{-1}$ para $R = 10 \text{ km}$; (iii) $E_0 = 2.45 \text{ mV} \cdot \text{m}^{-1}$, para $R = 100 \text{ km}$; (iv) $E_0 = 245 \text{ } \mu\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$, para $R = 1000 \text{ km}$.



Nas duas figuras anteriores apresenta-se a variação do campo de radiação com a distância R (expressa em quilómetros). Na primeira figura usa-se uma escala semi-logarítmica: as distâncias aparecem numa escala logarítmica, embora o campo apareça numa escala linear. Na segunda figura, porém, usa-se uma escala log-log: não só as distâncias mas também o campo radiado são expressos em unidades logarítmicas (base 10). Nessas duas figuras considera-se, tal como anteriormente, $V_0 = 244.95 \text{ V}$. Na primeira figura faz-se $1 \text{ km} \leq R \leq 100 \text{ km}$. Na segunda figura faz-se $1 \text{ km} \leq R \leq 1\,000 \text{ km}$.

No vácuo, sem fontes do campo, as equações de Maxwell escrevem-se (no domínio do tempo):

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{array} \right.$$

As ondas planas e monocromáticas da forma

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{m}} \end{array} \right.$$

satisfazem estas equações de Maxwell, desde que

$$\left[\begin{array}{l} B_0 = E_0 / c \\ \hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}} \end{array} \right. \quad \text{com} \quad \boxed{\hat{\mathbf{k}} \perp \hat{\mathbf{n}}} \quad \text{tendo-se} \quad \boxed{\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{R}}}$$

NOTA – Como sempre, dado um vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, define-se: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{a}}$. Nesta última equação, designa-se por $|\mathbf{a}|$ o comprimento do vector \mathbf{a} e por $\hat{\mathbf{a}}$ o correspondente vector (de comprimento) unitário. É também frequente escrever $a = |\mathbf{a}|$, pelo que $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$. Assim, ainda, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$, pois $\hat{\mathbf{a}}^2 = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}} = 1$. Como é sabido, no caso geral em que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ e onde $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, tem-se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\theta)$, em que $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ e $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \cos(\theta)$.

As equações diferenciais de Maxwell anteriores, para variação da forma

$$\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \exp[-i(\omega t)],$$

em que

$$\begin{cases} \nabla \mapsto i\mathbf{k} \\ \partial/\partial t \mapsto -i\omega \end{cases}$$

convertem-se nas equações algébricas

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E} \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Desta forma, vem

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = -\frac{\omega}{c} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B} \end{cases}$$

e, como

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B} = -k^2 \mathbf{B} \end{cases}$$

infere-se, finalmente, que

$$\boxed{k^2 = k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}.$$

NOTA – Esta última equação revela que, se se definir $k_0 = \omega/c$, a constante de propagação k das ondas electromagnéticas no vácuo é dada precisamente por $k = k_0$. Assim, vem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \Rightarrow \boxed{\lambda f = c}.$$

Este resultado é intuitivo: dado que $f = 1/T$ (sendo T o período temporal), a equação $\lambda f = c$ pode ser reescrita na forma $\lambda = cT$, ou seja, $\text{espaço}(\lambda) = \text{velocidade}(c) \times \text{tempo}(T)$.

O vector de Poynting (instantâneo) é dado por

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \frac{E_0^2}{c \mu_0} \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{k}} = \frac{E_0^2}{\eta_0} \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{k}}.$$

Logo, como

$$\langle \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \rangle = \frac{1}{2},$$

vem, efectivamente,

$$\boxed{\Sigma_0 = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{k}} = \Sigma_0 \hat{\mathbf{k}}} \quad \mapsto \quad \boxed{\Sigma_0 = \langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0}}.$$

NOTA – Do teorema de Pitágoras, segundo o qual $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, resulta que $\langle \sin^2(\theta) \rangle + \langle \cos^2(\theta) \rangle = 1$. Logo, atendendo a que $\langle \sin^2(\theta) \rangle = \langle \cos^2(\theta) \rangle$, obtém-se o resultado pretendido: $\langle \sin^2(\theta) \rangle = \langle \cos^2(\theta) \rangle = 1/2$.

As ondas electromagnéticas propagam-se no vácuo até ao infinito (i.e., quando $R \rightarrow \infty$), com velocidade c , a partir de uma carga eléctrica acelerada. Seja, com efeito, \mathbf{E}_{rad} o campo eléctrico do campo de radiação associado a uma carga eléctrica Q com aceleração \mathbf{a} . Mostra-se que, num dado ponto \mathbf{P} de observação, caracterizado em relação à origem (centrada na posição instantânea da carga) pelo vector de posição $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{R}}$, o campo de radiação é

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0 Q a}{4\pi R} [\cos(\theta) \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{a}}]},$$

em relação ao referencial onde a carga eléctrica (pontual) se encontra instantaneamente em repouso e onde θ representa o ângulo entre os vectores $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{a}}$. Note-se que, deste modo, vem

$$\left| \begin{aligned} [\cos(\theta) \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{a}}]^2 &= [\cos(\theta) \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{a}}] \cdot [\cos(\theta) \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{a}}] \\ &= \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) + 1 \\ &= 1 - \cos^2(\theta) \\ &= \sin^2(\theta) \end{aligned} \right|$$

$$\therefore \mathbf{E}_{\text{rad}}^2(\mathbf{P}) = |\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{P})|^2 = \left(\frac{\mu_0 Q a}{4\pi R} \right)^2 \sin^2(\theta) \Rightarrow \boxed{E_{\text{rad}}(\mathbf{P}) = \frac{Q a}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \sin(\theta)}.$$

Repare-se que, para $\theta=0$ ou $\theta=\pi$, não existe campo radiado. O campo radiado é máximo na direcção ortogonal a $\hat{\mathbf{a}}$, i.e., para $\theta=\pi/2$. Ou seja, fazendo

$$\boxed{\cos(\theta) \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{a}} \equiv \sin(\theta) \hat{\mathbf{n}}} \Rightarrow \cos(\theta) - \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \equiv \sin(\theta) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{R}})$$

$$\therefore \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \cos(\theta) \Rightarrow 0 \equiv \sin(\theta) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \equiv 0}$$

pode-se escrever

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{P}) = \frac{Q a}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} \sin(\theta) \hat{\mathbf{n}}},$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vector unitário. O campo magnético é dado por

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{P}) = \frac{1}{c} [\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{P})] = \frac{Q a}{4\pi \varepsilon_0 c^3 R} \sin(\theta) (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{n}})},$$

em que

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{R}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{R}}.$$

Assim, o vector de Poynting é dado por

$$\boxed{\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}_{\text{rad}} \times \mathbf{B}_{\text{rad}}) = \left[\frac{Q^2 a^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \right] \left[\frac{\sin^2(\theta)}{R^2} \right] \hat{\mathbf{R}} = S_r(\theta) \hat{\mathbf{R}}}.$$

Define-se a intensidade de radiação $U(\theta)$ tal que

$$\boxed{\text{intensidade de radiação}} \mapsto \boxed{U(\theta) = R^2 S_{\text{rad}}(\theta) = \left[\frac{Q^2 a^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \right] \sin^2(\theta)}.$$

A potência radiada é, finalmente, dada pela expressão:

$$\boxed{\text{potência radiada}} \mapsto \boxed{P_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi}.$$

Com efeito, o elemento de ângulo sólido é

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ângulo} \\ \text{sólido} \\ \text{elementar} \end{array}} \mapsto \boxed{d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi}$$

$$\therefore \int_0^{2\phi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi.$$

Daqui resulta a chamada

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{fórmula de} \\ \text{Larmor} \end{array}} \mapsto \boxed{P_{\text{rad}} = \frac{Q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}}.$$

NOTA – Na determinação da fórmula de Larmor houve a necessidade de calcular o seguinte integral que aparece frequentemente:

$$\boxed{\mathcal{I} = \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3}}.$$

Uma forma de o calcular é ter em consideração a fórmula trigonométrica

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{3}{4} \sin(\theta) - \frac{1}{4} \sin(3\theta)$$

$$\therefore \mathcal{I} = \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(3\theta) d\theta = \frac{4}{3}.$$

Porém, existe um processo mais simples que não necessita o conhecimento dessa fórmula trigonométrica: façamos

$$\zeta = \cos(\theta) \Rightarrow d\zeta = -\sin(\theta) d\theta$$

$$\therefore \mathcal{I} = \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) d\zeta = \left[\zeta - \frac{1}{3} \zeta^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

A fórmula de Larmor é válida no referencial do laboratório (que estuda o movimento da carga eléctrica) desde que $\beta \ll 1$. Portanto: só há potência radiada se a carga eléctrica tiver, em relação ao

laboratório, uma aceleração $a \neq 0$. Da fórmula de Larmor tira-se que a densidade do fluxo de potência é

$$\Sigma = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi R^2} = \left[\frac{\mu_0 Q^2 a^2}{24\pi^2 c} \right] \left[\frac{1}{R^2} \right].$$

No estudo das antenas é comum introduzir-se o conceito de intensidade de radiação U_0 da antena isotrópica, como sendo

$$U_0 = R^2 \Sigma = R^2 \langle S_{\text{rad}} \rangle = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi} \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}.$$

No caso da fórmula de Larmor, a correspondente intensidade de radiação da fonte isotrópica é dada por

intensidade de radiação da antena isotrópica	\mapsto	$U_0 = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{24\pi^2 c} = \frac{Q^2 a^2}{24\pi^2 \epsilon_0 c^3}.$
---	-----------	---

NOTA IMPORTANTE – Ao escrever-se a expressão (no início desta secção)

$$\Sigma_0 = \langle S \rangle = \frac{E_0^2}{2\eta_0},$$

está-se a admitir que as ondas electromagnéticas são ondas planas

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{n}}) \end{array} \right.$$

o que constitui uma *aproximação*: na medida em que $R \gg \lambda$, é possível aproximar a superfície esférica local pelo respectivo plano tangente com um certo erro.

Na realidade, as ondas são esféricas, da forma

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{V_0}{R} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{V_0}{cR} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{n}}) \end{array} \right.$$

o que, mesmo assim, despreza a respectiva directividade da fonte. Se se introduzir essa directividade, virá então

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{campo} \\ \text{de} \\ \text{radiação} \end{array}} \mapsto \begin{cases} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{V_0}{R} \sin(\theta) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{V_0}{cR} \sin(\theta) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{n}}) \end{cases}$$

$$\therefore \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)] = \frac{V_0^2}{\eta_0} \frac{\sin^2(\theta)}{R^2} \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{R}}.$$

O valor médio no tempo é, portanto,

$$\boxed{\langle \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{V_0^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2(\theta)}{R^2} \hat{\mathbf{R}}}.$$

Logo, a intensidade de radiação será dada por

$$U(\theta) = R^2 [\hat{\mathbf{R}} \cdot \langle \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \rangle] \Rightarrow \boxed{U(\theta) = \left[\frac{V_0^2}{2\eta_0} \right] \sin^2(\theta)}.$$

É esta expressão que deverá ser idêntica à expressão anterior:

$$U(\theta) = \left[\frac{\mu_0}{c} \left(\frac{Qa}{4\pi} \right)^2 \right] \sin^2(\theta) = \frac{3}{2} U_0 \sin^2(\theta).$$

Inferre-se, deste modo, que deverá ter-se

$$\boxed{V_0 = \frac{\mu_0 Qa}{2\sqrt{2}\pi}}.$$

Logo, atendendo a que

$$U_0 = \frac{2}{3} \left[\frac{\mu_0}{c} \left(\frac{Qa}{4\pi} \right)^2 \right],$$

inferre-se:

$$\boxed{U_0 = \frac{V_0^2}{3\eta_0}}.$$

Nestas condições, deverá escrever-se ainda

$$E_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{3\eta_0 U_0}}{R}$$

para o campo *equivalente* de uma fonte isotrópica.

O campo de radiação é, assim, constituído por ondas esféricas, com uma certa directividade.

A directividade $D(\theta, \phi)$ de uma antena é definida por

$$\text{directividade} \mapsto D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_0}.$$

Assim, neste caso, a directividade é dada por

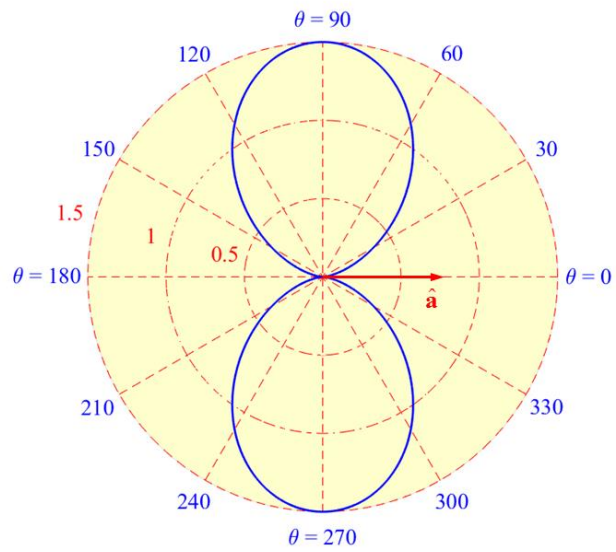
$$D(\theta) = \frac{U(\theta)}{U_0} = \frac{3}{2} \sin^2(\theta).$$

A directividade máxima D_0 obtém-se para

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow [D_0]_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{3}{2} \right) = 1.76091259055681... \text{ dB}.$$

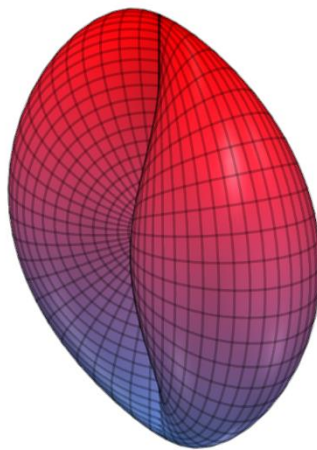
Na primeira figura seguinte representa-se, num diagrama polar, a directividade em função do ângulo $\theta = \angle(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{R}})$.

$$D(\theta) = \frac{3}{2} \sin^2(\theta)$$



$$\theta = \angle(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{R}})$$

Na próxima figura apresenta-se este mesmo gráfico mas em 3D (coordenadas esféricas) e onde o eixo vertical é o eixo z .



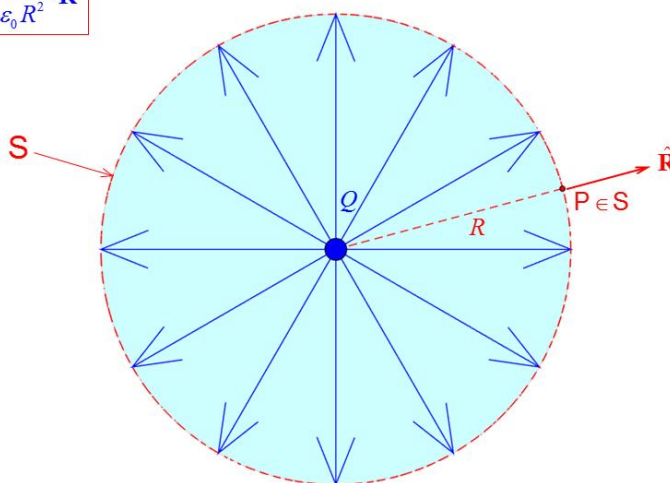
2. Campo electrostático

Vamos começar por calcular o campo electrostático de uma carga eléctrica Q no vácuo. Dada a simetria do problema, podemos aplicar a lei de Gauss (eléctrica) que, na sua forma local (ou diferencial), estabelece que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}},$$

onde ρ [$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$] representa a densidade volúmica de carga. Consideremos, então, um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem coincide com o centro da carga Q (considerada esférica de raio a). O campo eléctrico será radial e centrífugo (desde que $Q > 0$) e representa-se na figura seguinte.

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{P}) = E(\mathbf{P}) \hat{\mathbf{R}} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}}$$



$$\boxed{\int_S (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}}) dS = (4\pi R^2) E(\mathbf{P}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Dada a simetria do problema, todos os pontos sobre a superfície esférica S de raio R e área $A = 4\pi R^2$ têm a mesma intensidade E do campo eléctrico (criado pela carga Q). Seja \mathbf{R} qualquer vector de comprimento R ligando a origem a um ponto $\mathbf{P} \in S$. Logo, $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{R}}$, com $\hat{\mathbf{R}}^2 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 1$, tendo-se (campo radial centrífugo)

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}) = E(\mathbf{P}) \hat{\mathbf{R}}.$$

Pelo teorema de Gauss (ou da divergência), podemos então escrever

$$\Phi = \int_S (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}}) dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV$$

em que V é o volume da zona delimitada pela esfera de raio R , tal que

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi dr = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Designou-se por Φ o fluxo de \mathbf{E} através da superfície S . Tem-se, portanto,

$$\Phi = (4 \pi R^2) E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\mathbf{P}) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R^2}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{P}) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}}.$$

Uma carga eléctrica q (de teste, i.e., que não perturba significativamente o campo eléctrico existente), colocada no ponto \mathbf{P} , sofre a força (de Coulomb)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{4 \pi \epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}$$

que será: (i) atractiva, se $qQ < 0$; (ii) repulsiva, se $qQ > 0$.

O campo electrostático, portanto, varia com $1/R^2$ e é radial (ou longitudinal, no sentido da força de Coulomb). Facilmente se verifica que se trata de um campo conservativo, pois

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) E_\phi] + \frac{1}{R \sin(\theta)} \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} = 0.$$

Ou seja: podemos introduzir um potencial escalar U tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla U.$$

Tudo será diferente se, no laboratório onde tudo isto é observado, a carga eléctrica Q estiver animada de movimento com uma certa velocidade (relativa) \mathbf{v} e uma certa aceleração (relativa) \mathbf{a} .

3. Movimento uniforme

Nesta secção analisa-se o campo eléctrico provocado por uma carga eléctrica Q animada de movimento uniforme com velocidade \mathbf{v} . Designa-se por $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}}$ o vector de posição que liga, num dado instante temporal t , a carga Q ao ponto P de observação. Seja

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}} = (\beta c)\hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}} \end{array} \right] \mapsto \boxed{\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \cos(\theta)},$$

i.e., designa-se por θ o ângulo entre os vectores \mathbf{R} e \mathbf{v} . Como sempre, em relatividade restrita faz-se

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Nestas condições, mostra-se que o campo eléctrico criado pela carga em movimento uniforme é dado por:

$$\boxed{\mathbf{E} = \left\{ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right\} \left\{ \frac{1}{\gamma^2 [1 - \beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}} \right\} \hat{\mathbf{R}}}.$$

Esta expressão é demonstrada no final desta secção. Designemos por E_0 o campo electrostático (ou de Coulomb)

$$\boxed{E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}}.$$

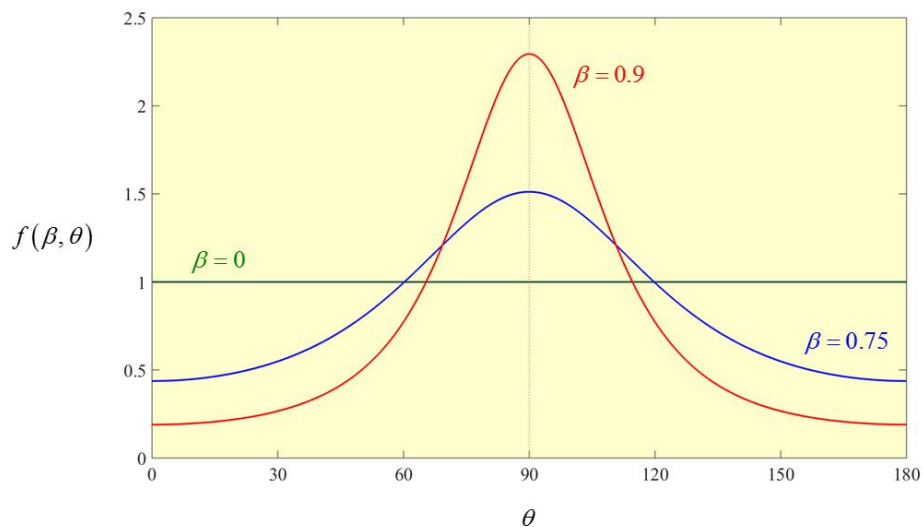
Então, tem-se

$$\boxed{\mathbf{E} = E_0 f(\beta, \theta) \hat{\mathbf{R}}} \mapsto \boxed{f(\beta, \theta) = \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}}}.$$

Note-se que $f(\beta, \theta)$ é um factor que depende da velocidade β bem como da orientação relativa θ do vector de posição \mathbf{R} do ponto de observação em relação ao vector \mathbf{v} . Para $\beta = 0$ recupera-se o caso electrostático, pois $f(\beta, \theta) = 1$.

NOTA – Por estranho que pareça o campo \mathbf{E} é radial – como se a informação sobre a posição instantânea da carga viajasse com velocidade infinita. Porém, isso não é exactamente assim: está-se a admitir que a velocidade é constante para $-\infty < t < \infty$. Só quando existe aceleração – o que, por definição, não acontecesse no caso em análise – é que há verdadeira informação electromagnética que se propaga, no máximo, com velocidade c . Por outras palavras: embora contrariando uma primeira interpretação ingénua da causalidade, esta realidade associada ao movimento uniforme *não* viola o segundo postulado de Einstein – segundo o qual nenhuma acção física pode viajar com uma velocidade superior a c .

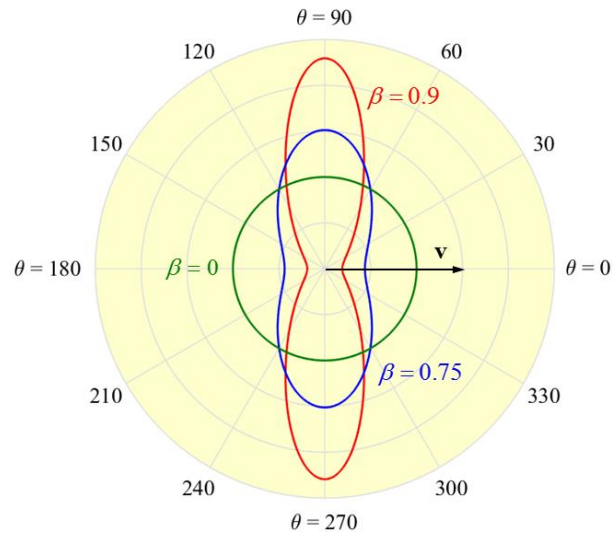
Na figura seguinte representa-se $f(\beta, \theta)$ em função do ângulo θ para diferentes valores de β .



Na figura seguinte apresenta-se um diagrama polar de $f(\beta, \theta)$ para três valores diferentes da velocidade (normalizada) β . Note-se que, como já se salientou atrás, é

$$f(\beta = 0, \theta) = 1$$

que corresponde a uma esfera de raio $f = 1$. Para $\beta = 1$ (onda electromagnética) ter-se-ia uma indeterminação: esta expressão só é válida para $\beta < 1$ pois nenhuma carga eléctrica pode viajar à velocidade c .



Vai-se, seguidamente, demonstrar a expressão geral que permite determinar o campo eléctrico de uma carga eléctrica Q em movimento uniforme.

Demonstração

Para fazer esta demonstração basta ter em consideração o seguinte (que não se demonstra aqui). Seja S' um referencial onde se mede uma carga eléctrica Q electrostática, cujo campo eléctrico é $\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$. Num outro referencial S (dito referencial do laboratório), que observa o movimento da mesma carga eléctrica Q a movimentar-se com uma velocidade $\mathbf{v} = (\beta c) \hat{\mathbf{x}}$, o campo eléctrico será dado por $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ tal que: (i) $E_x = E'_x$; (ii) $E_y = \gamma E'_y$; (iii) $E_z = \gamma E'_z$.

Apliquemos, então, esta transformação. No referencial S' o campo eléctrico é electrostático. Vem

$$\boxed{\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R')^2} \hat{\mathbf{R}}'} \mapsto \begin{cases} E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx'}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \\ E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qy'}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \\ E'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz'}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \end{cases}$$

pele que, no referencial S do laboratório, se tem

$$\begin{cases} E_x = E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx'}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \\ E_y = \gamma E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma Qy'}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \\ E_z = \gamma E'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma Qz'}{\left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2\right]^{3/2}} \end{cases}$$

Agora só temos de aplicar a *transformação de Lorentz*.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) = \gamma R_x = \gamma R \cos(\theta) \\ y' = y = R_y \\ z' = z = R_z \end{cases} \mapsto \begin{cases} (y')^2 + (z')^2 = y^2 + z^2 = R_y^2 + R_z^2 = R^2 \sin^2(\theta) \\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \gamma^2 R^2 \cos^2(\theta) + R^2 \sin^2(\theta) \end{cases}$$

$$\therefore (Qx') \hat{\mathbf{x}} + (\gamma Qy') \hat{\mathbf{y}} + (\gamma Qz') \hat{\mathbf{z}} = (\gamma QR_x) \hat{\mathbf{x}} + (\gamma QR_y) \hat{\mathbf{y}} + (\gamma QR_z) \hat{\mathbf{z}} = \gamma Q\mathbf{R}$$

Deste modo, tem-se

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma Q\mathbf{R}}{\left[\gamma^2 R^2 \cos^2(\theta) + R^2 \sin^2(\theta)\right]^{3/2}}.$$

Notemos, agora, que

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 R^2 \cos^2(\theta) + R^2 \sin^2(\theta) &= R^2 \left[\frac{\cos^2(\theta)}{1-\beta^2} + R^2 \sin^2(\theta) \right] \\
 &= R^2 \left[\frac{\cos^2(\theta) + (1-\beta^2) \sin^2(\theta)}{1-\beta^2} \right] \\
 &= R^2 \frac{1-\beta^2 \sin^2(\theta)}{1-\beta^2} \\
 &= \gamma^2 R^2 [1-\beta^2 \sin^2(\theta)]
 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\gamma Q R) \hat{\mathbf{R}}}{\gamma^3 R^3 [1-\beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}} = \left\{ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right\} \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{\gamma^2 [1-\beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}} \right\}$$

$$\therefore \mathbf{E} = \left\{ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right\} \left\{ \frac{1}{\gamma^2 [1-\beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}} \right\} \hat{\mathbf{R}}$$

tal como se pretendia demonstrar.

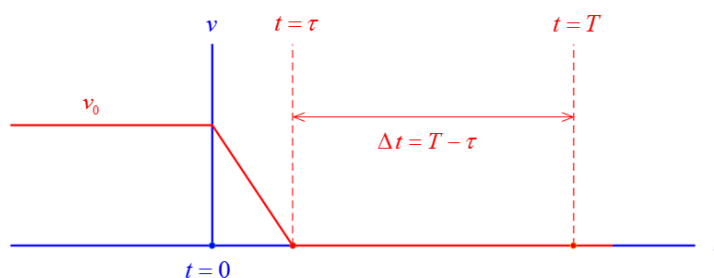
4. Campo de radiação

Na secção anterior analisou-se uma carga eléctrica animada de movimento uniforme e linear. Nestas condições não há radiação de energia electromagnética.

Nesta secção considera-se um efeito novo: *uma carga eléctrica animada de movimento acelerado radia energia electromagnética*. É este efeito que está na base do funcionamento das antenas.

Porém, não se vai considerar o caso geral da radiação de uma carga em movimento – isso requeria o estudo dos potenciais de Liénard-Wiechert e iria desviar-nos do nosso objectivo fundamental: estudar a radiação electromagnética das antenas. Aqui, portanto, o objectivo é mais simples e directo: mostrar *fisicamente* de que forma a aceleração de uma carga provoca o aparecimento do chamado *campo de radiação*. A principal característica deste campo é que se trata de um campo transversal (i.e., os vectores \mathbf{E} e \mathbf{B} residem num plano perpendicular ao vector $\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{R}}$ que liga a carga pontual Q ao ponto P de observação) cuja amplitude varia inversamente com a distância R .

Suponhamos, então, o seguinte: uma carga eléctrica (pontual) Q desloca-se ao longo do eixo x com velocidade constante v_0 desde $t = -\infty$ até $t = 0$. Em $t = 0$ a carga encontra-se no ponto $x = 0$ e, neste ponto e neste instante, inicia-se um processo de desaceleração da carga – tal como se indica na figura seguinte.



No intervalo temporal $0 < t < \tau$ decorre, então, o processo de aceleração negativa, de amplitude $a = v_0 / \tau$, de tal forma que a carga fica imobilizada no ponto $x_\tau = v_0 \tau / 2$ para $t \geq \tau$. Com efeito, tem-se

$$\boxed{0 < t < \tau} \mapsto \begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} v_0 \frac{t^2}{\tau} \\ \frac{dx}{dt} = v_0 - v_0 \frac{t}{\tau} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{v_0}{\tau} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \left| \frac{d^2 x}{dt^2} \right| = \frac{v_0}{\tau}} .$$

No instante $t = \tau$ a carga encontra-se no ponto

$$\boxed{x_\tau = x(\tau) = \frac{1}{2} v_0 \tau}$$

aí ficando doravante imobilizada (i.e., para $t \geq \tau$).

« Electromagnetic “news” travels at the speed of light, so what concerns Q is the position, velocity, and acceleration q had at some earlier time, when the message left. »

David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics, Third Edition*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999 (page 58). [Discutindo o efeito de uma carga eléctrica q sobre uma outra carga Q . No nosso estudo inverte-se o papel atribuído a estas duas cargas.]

Porém, a "notícia" de que a carga parou no instante $t = \tau$ ficando doravante imobilizada no ponto $x = x_\tau$ não viaja com velocidade infinita. De acordo com a teoria da relatividade (restrita) de Einstein, existe um limite máximo para a propagação deste tipo de "notícias" – esse limite é c . E, de acordo com a teoria da electrodinâmica clássica (de Maxwell), as "notícias" electromagnéticas propagam-se, no vácuo, precisamente com a velocidade c (em qualquer referencial de inércia, acrescentaria Einstein). Consequentemente, a informação sobre a paragem da carga tem início no instante $t = \tau$ e propaga-se em todas as direcções, a partir do ponto $x = x_\tau$, com a velocidade

$$\boxed{c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} .$$

É este limite cósmico para a propagação de "notícias" físicas que está por detrás da existência de radiação electromagnética e que, portanto, justifica a existência de antenas...

Vejamos porquê.

Para simplificar a nossa análise vai-se considerar que: (i) $v_0 \ll c$; (ii) $T \gg \tau$.

Passado um tempo $\Delta t = T - \tau$ após a paragem da carga, a informação sobre esta paragem só se propagou até uma distância $R = c \Delta t = c(T - \tau)$. O início da desaceleração, por sua vez, propagou-se até uma distância (ligeiramente) maior: $R = cT$. Ou seja: toda a informação sobre o processo de desaceleração da carga encontra-se localizada entre duas superfícies esféricas, de raios $R = c \Delta t = c(T - \tau)$ e $R = cT$, numa casca ou camada esférica (zona de transição) de espessura $\delta = c\tau$. Note-se que esta espessura δ é muito menor que o raio das duas superfícies esféricas consideradas – desde que o instante de observação seja $T \gg \tau$. Podemos, então, fazer a seguinte análise aproximada: dado que $x_\tau = v_0 \tau / 2 \ll v_0 T$, as duas superfícies esféricas, atrás referidas, são praticamente concêntricas – o que equivale a fazer a seguinte aproximação: $x_\tau \approx 0$.

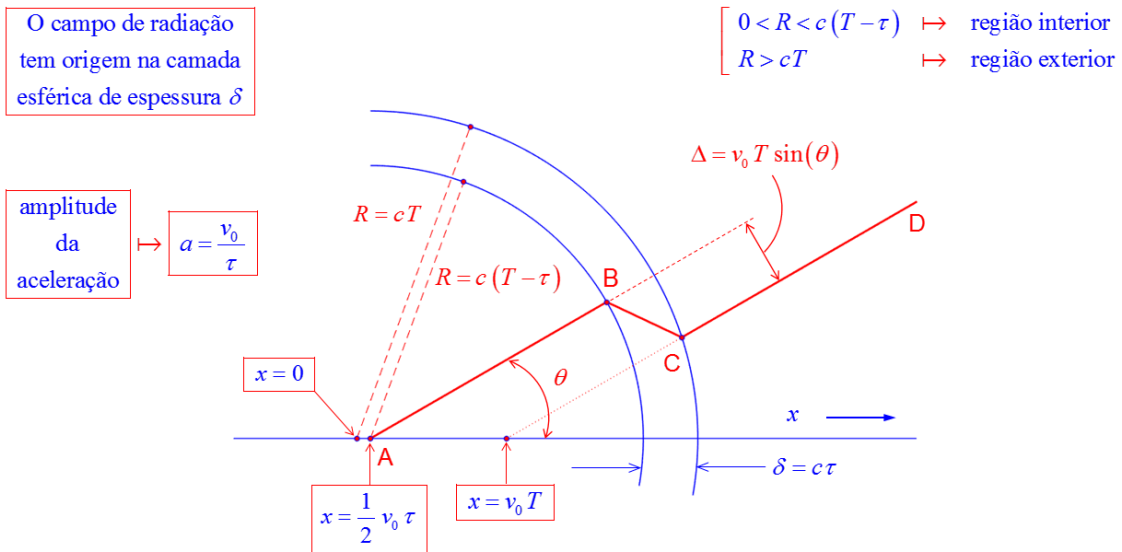
O campo eléctrico (e as respectivas linhas de força deste campo) de uma carga animada de movimento uniforme (tal como o estudado na secção anterior) está imediatamente ligado à posição da carga em cada instante – no sentido em que, se o movimento é uniforme, houve tempo (desde o infinito passado) para a informação se propagar a todo o espaço. Só a alteração em relação ao estado de movimento uniforme (i.e., a aceleração) é que é uma "notícia" recente, que se propaga desde um passado cuja memória (ainda) não se apagou...

Portanto, do ponto de vista do instante $t = T$ de observação, a situação é a que se descreve a seguir.

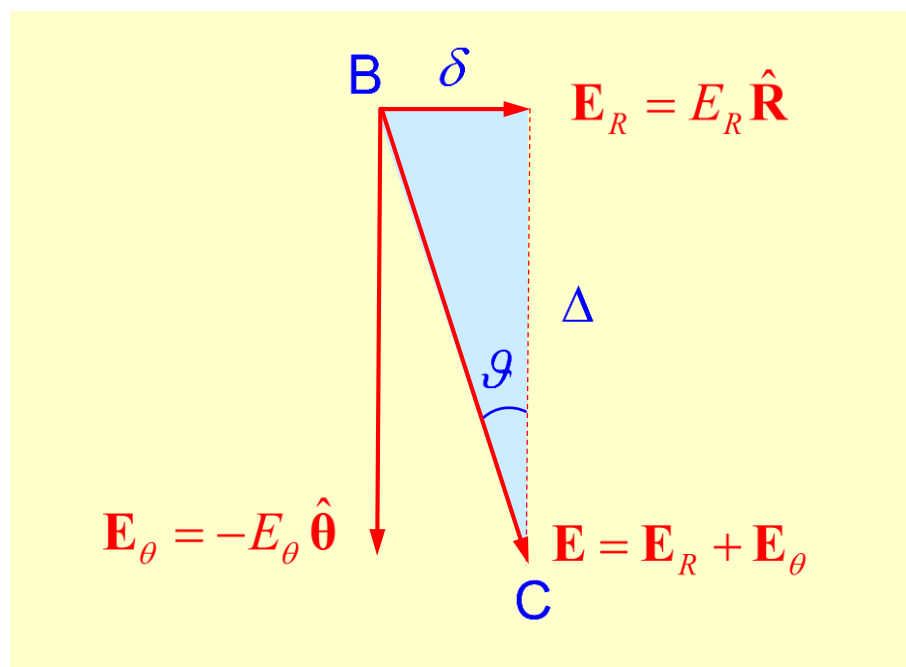
- Na *região exterior*, para $R > cT$, a notícia do início da perturbação do movimento da carga (desaceleração ou aceleração negativa) ainda não chegou. O campo eléctrico é o de uma carga animada de movimento uniforme, que deveria estar (caso não tivesse sido detida pelo processo de desaceleração) na posição fictícia $x = v_0 T$ (i.e., como se a carga tivesse continuado o seu movimento uniforme).
- Na *região interior*, para $R < c(T - \tau)$, tudo se passa (já) reflectindo a situação (actual) correspondente ao facto da carga se encontrar imobilizada em $x = x_\tau \approx 0$. Ou seja: o campo, nesta região interior, tem a natureza de um campo electrostático.

Assim, tudo é conhecido – à excepção da região de transição, numa camada esférica de espessura $\delta = c\tau$. Porém, dado que se considera $v_0 \ll c$, podemos também fazer outra aproximação razoável: o campo na região exterior (i.e., para $R > cT$), apesar de corresponder a uma situação que se desvia consideravelmente da situação electrostática para valores da velocidade normalizada $\beta = v_0 / c$ próximos da unidade, é então – para todos os efeitos práticos – a de um campo (também) electrostático tal como na região interior para $R < c(T - \tau)$. Mas então a lei de Gauss (sobre o fluxo do campo eléctrico) irá permitir relacionar as linhas de força nesta região de transição (de espessura δ) quer com a região exterior quer com a região interior. Veja-se, para o efeito, a figura da página seguinte.

Tudo se resume, agora, em mostrar de que forma a linha de força do campo eléctrico (que na figura é representada pela linha ABCD) se completa.



No sistema de coordenadas esféricas (R, θ, ϕ) , em que o ângulo θ é aqui medido em relação ao eixo x (sendo habitual neste sistema de coordenadas considerar-se o eixo z) e o ângulo ϕ é medido no plano yz , o lado BC da linha de força é a hipotenusa de um triângulo rectângulo como se indica na figura seguinte (nesta figura este triângulo rectângulo é apresentado numa inclinação diferente da considerada na figura anterior).



Notemos que, no triângulo rectângulo de hipotenusa **BC**, se tem:

$$\tan(\vartheta) = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{c\tau}{v_0 T \sin(\theta)} = \frac{c}{aT \sin(\theta)} = \frac{E_R}{E_\theta} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{E_\theta}{E_R} = \cot(\vartheta) = \frac{aT}{c} \sin(\theta)}.$$

É ainda necessário justificar a seguinte afirmação anterior: a linha **ABCD** representa uma *mesma* linha de força do campo eléctrico. Com efeito, pela lei de Gauss, a linha **AB** (na região interior) contribui com o mesmo fluxo eléctrico da carga Q (localizada em $x = x_r$) que a linha **CD** (na região exterior) que faz o mesmo ângulo θ com o eixo x e que provém da mesma carga Q (mas agora localizada em $x = v_0 \tau$). Além disso, como tudo se passa (por hipótese) no vácuo, o campo eléctrico no ponto **B** é radial (se se considerar que este ponto se encontra do lado da região interior) e é dado pela forma electrostática

$$\boxed{E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}}$$

em que

$R = c(T - \tau) = cT - c\tau = cT - \delta \approx cT$. Note-se que existe uma continuidade nesta componente radial no ponto **B**, quer se considere o lado de dentro (i.e., ainda na região interior) quer se considere o lado de fora (i.e., já dentro da zona de transição). Esta continuidade advém da lei de Gauss. Mas então, do lado da zona de transição irá aparecer uma componente *transversal* E_θ que, pela relação E_θ / E_R atrás calculada, tem o valor

$$E_\theta = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \left[\frac{aT}{c} \sin(\theta) \right] = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \left[\frac{a(cT)}{c^2} \sin(\theta) \right] \approx \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \left[\frac{aR}{c^2} \sin(\theta) \right]$$

$$\therefore \quad \boxed{E_\theta = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin(\theta)}{R}}.$$

Logo, no ponto **B**, observa-se uma descontinuidade global no campo eléctrico: apesar de se verificar uma continuidade da componente radial, dá-se o aparecimento de uma componente transversal do lado de fora. Em síntese: o campo eléctrico no ponto **B** é dado pelas expressões que, a seguir, se apresentam.

$$\text{Ponto B} \mapsto \begin{cases} R = (cT - \delta)^- \mapsto \boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}} \\ R = (cT - \delta)^+ \mapsto \boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}} - \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\sin(\theta)}{R} \hat{\boldsymbol{\theta}}} \end{cases}$$

Este é um resultado importante e surpreendente. Com efeito,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \right] \right\} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[\frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\sin(\theta)}{R} \right] \right\} = \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \sin(\theta).$$

Ou seja: na zona distante da carga apenas a componente transversal subsiste. É esta componente *transversal* que constitui aquilo que se designa por *campo de radiação*:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -E_{\text{rad}} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \text{ com } E_{\text{rad}} = E_{\theta}.$$

$$\boxed{E_{\text{rad}} = \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\sin(\theta)}{R}}$$

$$\boxed{\lim_{R \rightarrow \infty} \{ R E_{\text{rad}} \} = \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \sin(\theta)}$$

Esta última condição será entendida mais adiante quando se analisar a potência radiada.

NOTA – Assim, como se acaba de ver, o campo de radiação é aquela parte do campo que subsiste, de forma significativa, na zona distante. E, como revela a expressão de E_{rad} , a respectiva amplitude varia com $1/R$. Além disso, apesar do campo de radiação ter simetria azimutal (i.e., E_{rad} não varia com o azimute ϕ), existe uma dependência com a latitude θ . Nomeadamente, na direcção x do movimento (i.e., para $\theta = 0, \pi$) o campo de radiação é nulo: $E_{\text{rad}} = 0$. O máximo de radiação verifica-se para qualquer direcção ortogonal à direcção do movimento: para $\theta = \pi/2$ vem

$$\max \{ E_{\text{rad}} \} = E_{\text{rad}} \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{1}{R}.$$

O campo de radiação deve-se exclusivamente à existência de uma aceleração a da carga: num dado instante $T \gg \tau$ a zona de transição (onde se observa uma componente transversal do campo eléctrico) tem uma espessura $\delta = c\tau$, de modo que $\delta \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow 0$ (implicando $a = v_0/\tau \rightarrow \infty$).

O campo de radiação – uma vez despoletado – ganha uma autonomia própria, perdurando para sempre. A zona de transição, onde o campo de radiação se localiza, vai-se afastando da carga mas nunca deixa de existir – mesmo após o intervalo de aceleração ter terminado.

Apesar das zonas exterior e interior serem delimitadas por superfícies esféricas (quase) concêntricas, as linhas de força destas duas regiões não convergem para o mesmo ponto.

- Na *zona interior* as linhas de força convergem para $x = x_r = v_0 \tau / 2$.
- Na *zona exterior* as linhas de força convergem para a posição fictícia $x = v_0 T$ e, neste caso, este ponto vai deslocando-se sucessivamente e de forma uniforme, com o aumento de T , para a direita.

NOTA HISTÓRICA – A análise desta secção segue de perto a perspectiva apresentada por Edward Mills Purcell (1912 – 1997), físico americano e prémio Nobel da Física de 1952, no seu livro *Electricity and Magnetism* (publicado, pela primeira vez em 1963, como parte integrante do *Berkeley Physics Course*) destinado a alunos *undergraduate*. Este livro rivaliza com o segundo volume das *Feynman Lectures on Physics* na importância histórica para a pedagogia do electromagnetismo destinado a alunos do primeiro ciclo de estudos universitários (alunos da licenciatura). Já depois da morte de Edward Purcell, David Morin dedicou-se à tarefa de actualizar este livro:

Edward M. Purcell and David J. Morin, *Electricity and Magnetism, Third Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

No entanto, o cálculo desta descontinuidade do campo eléctrico (no ponto **B**) foi feito – pela primeira vez – por Sir Joseph John Thompson (1856 – 1940) em 1903 (dois anos antes da teoria da relatividade restrita de Einstein) no seu livro *Electricity and Matter* (página 55), publicado pela Yale University Press, New Haven, Connecticut. J. J. Thompson recebeu o prémio Nobel da Física em 1906 (nomeadamente, pela descoberta do electrão). Em 1923 o físico experimental americano Robert Andrews Millikan (1868 – 1953) recebeu o prémio Nobel da Física por ter medido a carga eléctrica do electrão e pelos seus trabalhos experimentais sobre o efeito fotoeléctrico.

Para uma onda no vácuo, o campo magnético **B** é ortogonal a **E** e, por sua vez, tanto **E** como **B** são ortogonais a **R**. Associado ao campo E_{rad} aparece um campo B_{rad} tal que

$$B_{\text{rad}} = \frac{1}{c} E_{\text{rad}} = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin(\theta)}{R}.$$

A densidade de energia eléctrica na zona de transição é

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{\text{rad}}^2 = \left(\frac{Q^2 a^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0 c^4} \right) \left[\frac{\sin(\theta)}{R} \right]^2.$$

A correspondente densidade de energia magnética é

$$u_m = \frac{1}{2 \mu_0} B_{\text{rad}}^2 = \left(\frac{Q^2 a^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0 c^4} \right) \left[\frac{\sin(\theta)}{R} \right]^2 = u_e.$$

A densidade de energia electromagnética total é, portanto,

$$u_{\text{rad}} = u_e + u_m = \left(\frac{Q^2 a^2}{16 \pi^2 \varepsilon_0 c^4} \right) \left[\frac{\sin(\theta)}{R} \right]^2.$$

A densidade média nesta zona de transição será

$$\langle u_{\text{rad}} \rangle = \left(\frac{Q^2 a^2}{16 \pi^2 \varepsilon_0 c^4} \right) \frac{\langle \sin^2(\theta) \rangle}{R^2}.$$

Mas, por outro lado, como se viu atrás (página 9):

$$\langle \sin^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$\langle u_{\text{rad}} \rangle = \left(\frac{Q^2 a^2}{24 \pi^2 \varepsilon_0 c^4} \right) \frac{1}{R^2}.$$

A energia electromagnética média armazenada na camada esférica de espessura δ é então dada por

$$\mathfrak{E}_{\text{rad}} = (4\pi R^2 \delta) \langle u_{\text{rad}} \rangle = (4\pi R^2 c \tau) \langle u_{\text{rad}} \rangle \Rightarrow \mathfrak{E}_{\text{rad}} = \frac{Q^2 a^2 \tau}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

Note-se algo muito importante: esta energia $\mathfrak{E}_{\text{rad}}$ viaja para o infinito, com velocidade c , *sem atenuação* (estamos a supor que tudo se passa no vácuo) visto que não depende de R . A potência radiada, uma vez que este processo corresponde ao período τ de aceleração, será

$$P_{\text{rad}} = \frac{\mathfrak{E}_{\text{rad}}}{\tau} \Rightarrow \boxed{P_{\text{rad}} = \frac{Q^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c}}.$$

A última expressão é conhecida na literatura como *fórmula de Larmor*. Esta fórmula é válida desde que $\beta \ll 1$. Mostra-se que, no caso geral, a fórmula correcta é a chamada *fórmula de Liénard*

$$P_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 Q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left(a^2 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 \right)$$

em que, como é costume em relatividade, se fez

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Note-se que a fórmula de Liénard difere da fórmula de Larmor de um factor $F = F(\beta, \xi)$ que depende exclusivamente de $\beta = v/c$ e do ângulo $\xi = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{a})$. Com efeito, a fórmula de Liénard pode ser reescrita na forma

$$\left[\begin{array}{l} [P_{\text{rad}}]_{\text{Larmor}} = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{6\pi c} \\ F(\beta, \xi) = \left[\frac{1 - \beta^2 \sin^2(\xi)}{(1 - \beta^2)^3} \right]^{1/2} \end{array} \right] \mapsto \boxed{[P_{\text{rad}}]_{\text{Liénard}} = F^2(\beta, \xi) [P_{\text{rad}}]_{\text{Larmor}}}$$

Tem-se, então,

$$F(\beta, \xi) = \gamma^3 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\xi)}.$$

Em particular, obtém-se

$$F(\beta, \xi = 0) = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \gamma^3, \quad F\left(\beta, \xi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2.$$

O caso $\xi = 0$ corresponde ao movimento linear (em que $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$); o caso $\xi = \pi/2$ corresponde ao movimento circular uniforme (em que $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ e $d\beta/dt = 0$). Além disso,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \{F(\beta, \xi)\} = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \{F(\beta, \xi)\} = \infty.$$

Em cinemática relativista define-se a *aceleração própria* α , tal que

$$\alpha^2 = \gamma^6 \left(a^2 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 \right) = a^2 F^2(\beta, \xi) \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{a} = F(\beta, \xi) = \gamma^3 \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\xi)}}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{cases} \xi = 0 & \mapsto \alpha = \gamma^3 a \\ \xi = \pi/2 & \mapsto \alpha = \gamma^2 a \end{cases}$$

e, à luz deste conceito de aceleração própria, é possível escrever a fórmula de Liénard como segue:

$$\boxed{P_{\text{rad}} = \frac{Q^2 \alpha^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 Q^2 \alpha^2}{6\pi c}}.$$

Ou seja: a fórmula de Larmor obtém-se simplesmente da fórmula de Liénard fazendo a simples substituição $[\alpha \mapsto a]$ que é aproximadamente válida para $\beta \ll 1$.

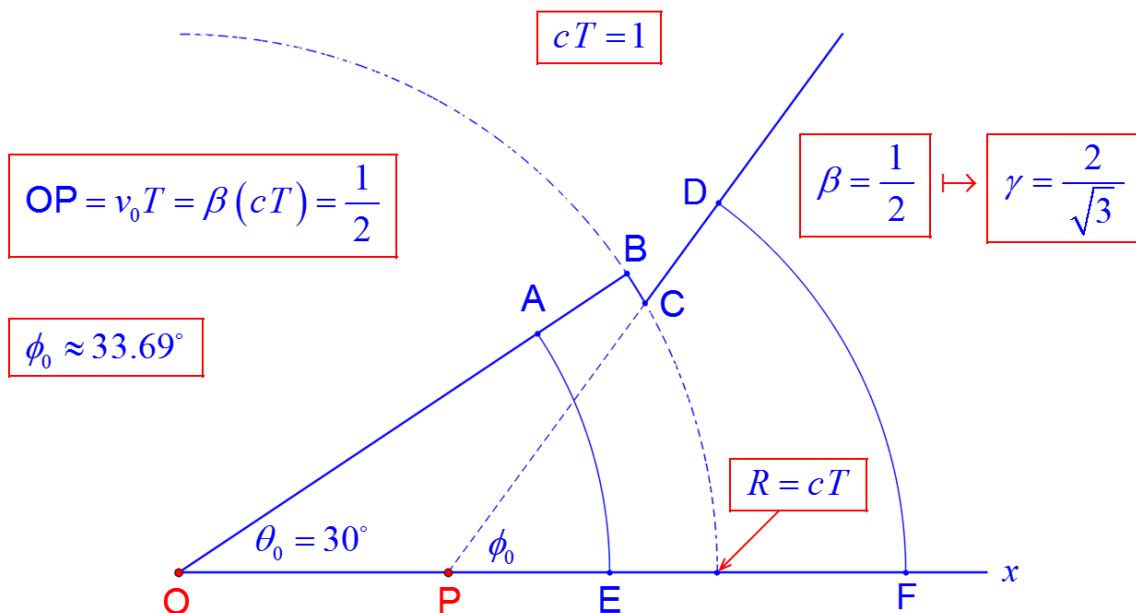
O que acaba de ser demonstrado revela que uma carga eléctrica em movimento perde energia para a radiação. Se o modelo atómico fosse o de uma espécie de sistema planetário clássico microscópico (onde o papel do Sol seria representado pelo núcleo e os planetas pelos electrões girando à sua volta), então os electrões iriam certamente perder energia por radiação e iriam fatalmente chocar com o núcleo: *o átomo seria instável!* É por essa razão que o mundo microscópico *não* obedece à física clássica. Obedece, como a partir de 1925 começaria a ficar claro, a uma nova teoria física profundamente diferente: a *mecânica quântica*.

5. Campo de radiação revisitado

No cálculo do campo de radiação, feito na secção anterior, desprezou-se o efeito compressor sobre as linhas de força do campo eléctrico. Esse efeito compressor deve-se ao movimento uniforme da carga Q . Essa aproximação é razoável desde que $\beta \ll 1$. Como se viu anteriormente, em movimento uniforme o campo é radial (como no caso electrostático) mas tem uma certa directividade, i.e., apesar de a carga não radiar energia a estrutura do campo eléctrico desvia-se significativamente da situação simétrica do campo electrostático quando β aumenta – tal como se ilustra na figura da página 18.

Nesta secção vai-se analisar, com mais profundidade, a estrutura das linhas de força da situação estudada na secção anterior. Consideremos – tal como aí – que a carga Q é imobilizada após ter vindo animada de movimento uniforme, com velocidade $v_0 = \beta c$, ao longo do eixo x . Só que, agora, interessa-nos centrar a nossa atenção sobre a estrutura das linhas de força do campo eléctrico nas duas regiões (interior e exterior). Assim, para esse efeito, vai-se admitir que a carga termina abruptamente o seu movimento uniforme no ponto $x=0$ no instante $t=0$. Logo, no instante $t=T > 0$, a interface entre a zona exterior e a zona interior reduz-se à superfície esférica centrada na origem e raio $R = cT$. Por outras palavras: a espessura $\delta = c\tau$ da zona de transição (considerada na secção anterior) anula-se na perspectiva aqui adoptada – a radiação será um impulso de Dirac do tipo $\delta(t-T)$ que se propaga até ao infinito com velocidade c .

Consideremos, então, a situação descrita na figura seguinte.



A carga é imobilizada no ponto O em $x=0$ e $t=0$. No instante de observação $t=T$ mostra-se uma parte da superfície esférica de raio $R=cT=1$ a que se reduz a zona de transição (que separa a zona interior $R < cT$ da zona exterior $R > cT$). Como se admite que $\beta=0.5$, a posição fictícia da carga (do ponto de vista das linhas de força da zona exterior) é o ponto P correspondente a $x=v_0T=\beta(cT)=0.5$. A linha de força da zona interior considerada é OAB enquanto que a linha de força da zona exterior é CD . Estas duas linhas de forças ligam-se, na interface $R=cT$ de transição pela linha de força BC .

Determinemos, de seguida, a relação (na figura anterior) entre os ângulos θ_0 e ϕ_0 . Para esse efeito procede-se à rotação da linha $EABCDF$ em torno do eixo x , assim gerando uma superfície fechada. De acordo com a lei de Gauss, aplicada a essa superfície, o correspondente fluxo total é nulo. Portanto, o fluxo Φ_1 que entra através de EA é igual ao que fluxo Φ_2 que sai através de FD . E tem-se

$$\Phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \Rightarrow \boxed{\Phi_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0} [1 - \cos(\theta_0)]}$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} \frac{(1-\beta^2) R^2 \sin(\theta)}{[1-\beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}} d\theta d\phi$$

pelo que

$$\left[\begin{array}{l} \Phi_2 = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1-\beta^2) \mathcal{J} \\ \mathcal{J} = \int_0^{\phi_0} \frac{\sin(\theta)}{[1-\beta^2 \sin^2(\theta)]^{3/2}} d\theta \end{array} \right.$$

Cálculo do integral \mathcal{J}

Comecemos por escrever

$$\boxed{a^2 = 1 - \beta^2} \mapsto \mathcal{J} = \int_0^{\phi_0} \frac{\sin(\theta)}{[a^2 + \beta^2 \cos^2(\theta)]^{3/2}} d\theta$$

e façamos a mudança de variável

$$x = \beta \cos(\theta) \mapsto dx = -\beta \sin(\theta) d\theta.$$

Nestas condições, obtém-se

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{\beta} \int_{\beta}^{\beta \cos(\phi_0)} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Logo, atendendo a que se tem

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \right] = \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}},$$

infere-se que

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{\beta} \left[\frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \right]_{\beta}^{\beta \cos(\phi_0)} \Rightarrow \boxed{\mathcal{J} = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[1 - \frac{\cos(\phi_0)}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\phi_0)}} \right]}.$$

Assim, conclui-se que

$$\boxed{\Phi_2 = \frac{Q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{\cos(\phi_0)}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\phi_0)}} \right]}.$$

Portanto,

$$\boxed{\Phi_1 = \Phi_2} \Rightarrow \cos(\theta_0) = \frac{\cos(\phi_0)}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\phi_0)}}.$$

Então, tendo em consideração que

$$\tan(\theta_0) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)}}{\cos(\theta_0)},$$

resulta

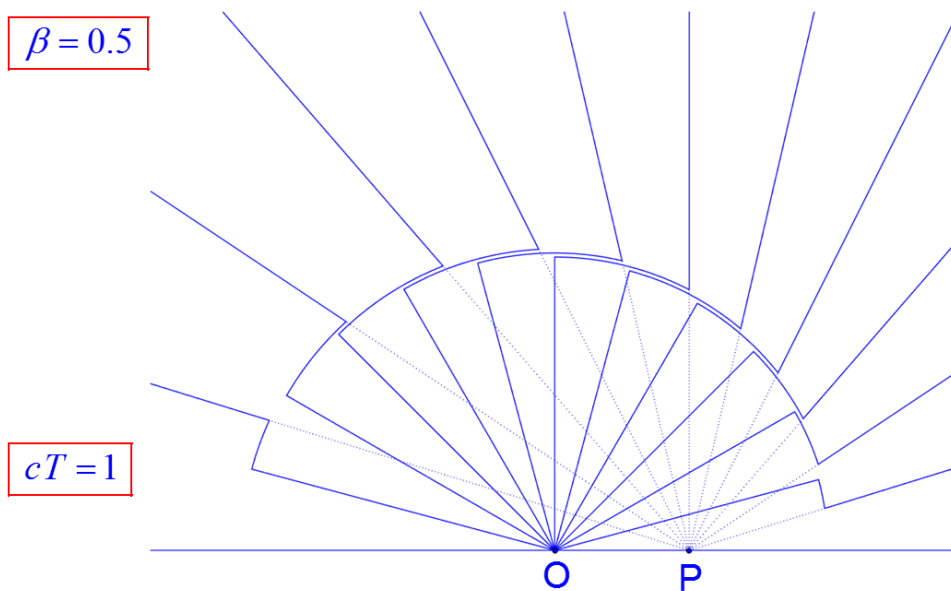
$$\tan(\theta_0) = \sqrt{1 - \beta^2} \tan(\phi_0) \quad \therefore \boxed{\tan(\phi_0) = \gamma \tan(\theta_0)}.$$

Na secção anterior fez-se a aproximação $\beta \ll 1$ e, conseqüentemente, $\gamma \approx 1$. Daí que, na primeira figura da página 22, se tenha adoptado a aproximação $\theta_0 \approx \phi_0$. Já nesta secção, na figura da página 29, tem-se (utilizando a expressão que acaba de ser deduzida)

$$\phi_0 = \tan^{-1}[\gamma \tan(\theta_0)] \quad \therefore \begin{cases} \theta_0 = 30^\circ \\ \beta = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \phi_0 \approx 33.69^\circ .$$

No entanto, se se considerar $\beta = 0.9$ e $\theta_0 = 30^\circ$, tira-se que $\phi_0 \approx 52.95^\circ$. Para $\beta = 0.99$ e $\theta_0 = 30^\circ$, por sua vez, viria $\phi_0 \approx 76.27^\circ$.

Na figura seguinte mostra-se, então, o aspecto global das linhas de força do campo eléctrico (apenas no hemisfério "norte") para $\beta = 0.5$ e $cT = 1$ o que dá $R = cT = 1$ segundo-luz e $OP = v_0 T = \beta(cT) = \beta R = 0.5$ segundos-luz.



6. Qual é a cor do céu?

A fórmula de Larmor, deduzida anteriormente, permite explicar a razão pela qual – na maioria das situações – o céu é observado com uma cor azul. É disto que trata esta secção.

Comecemos por notar que a luz proveniente do Sol, e que é observada na Terra, faz um percurso correspondente a (aproximadamente) uma *unidade astronómica* ou 1 au (*astronomic unit*), com (por definição: valor exacto)

$$1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} .$$

Como a velocidade da luz tem o valor (também exacto, por definição) de $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, isto significa que a luz do Sol demora (aproximadamente) um tempo

$$\Delta t = \frac{149\,597\,870\,700}{299\,792\,458} = 499.0048 \text{ s} = 8.3157 \text{ minutos}$$

a chegar ao nosso planeta. Podemos dizer, por isso, que o Sol se encontra a uma distância de cerca de 8 minutos-luz da Terra.

NOTA – Estas definições exactas (da unidade astronómica e da velocidade da luz) permitem estabelecer o seguinte: como 1 dia (1 d) tem a duração de $24 \times 3600 = 86\,400 \text{ s}$, infere-se que

$$c = \frac{299\,792\,458 \times 86\,400}{149\,597\,870\,700} = 173.144\,632\,674\,240 \dots \text{ au} \cdot \text{d}^{-1} .$$

Sendo α a paralaxe do Sol e $a = 6\,378.137 \text{ km}$ o raio (equatorial) da Terra, isto significa que a unidade astronómica é 23 455 vezes o raio da Terra.

$$1 \text{ au} = 23455 a = a \cot(\alpha) \Rightarrow \alpha = 3\,600 \times \tan^{-1} \left(\frac{6\,378\,137}{149\,597\,870\,700} \right) = 8.794143'' .$$

Acontece que o espectro do visível é composto, de forma aproximada, pelos comprimentos de onda que se apresentam na tabela seguinte.

Espectro do visível

Cor	Comprimento de onda	Frequência	Energia do fóton
violeta	380 – 450 nm	668 – 789 THz	2.75 – 3.26 eV
azul	450 – 495 nm	606 – 668 THz	2.50 – 2.75 eV
verde	495 – 570 nm	526 – 606 THz	2.17 – 2.50 eV
amarelo	570 – 590 nm	508 – 526 THz	2.10 – 2.17 eV
laranja	590 – 620 nm	484 – 508 THz	2.00 – 2.10 eV
vermelho	620 – 750 nm	400 – 484 THz	1.65 – 2.00 eV

Como se demonstra a seguir, a fórmula de Larmor prevê que as partículas da atmosfera dispersem (ou espalhem) a luz (dispersão de Rayleigh) de acordo com

$$\boxed{\text{dispersão de Rayleigh}} \mapsto \boxed{P_s \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}}.$$

Se se comparar entre o azul (com $\lambda = 490 \text{ nm}$) e o vermelho (com $\lambda = 700 \text{ nm}$), tem-se

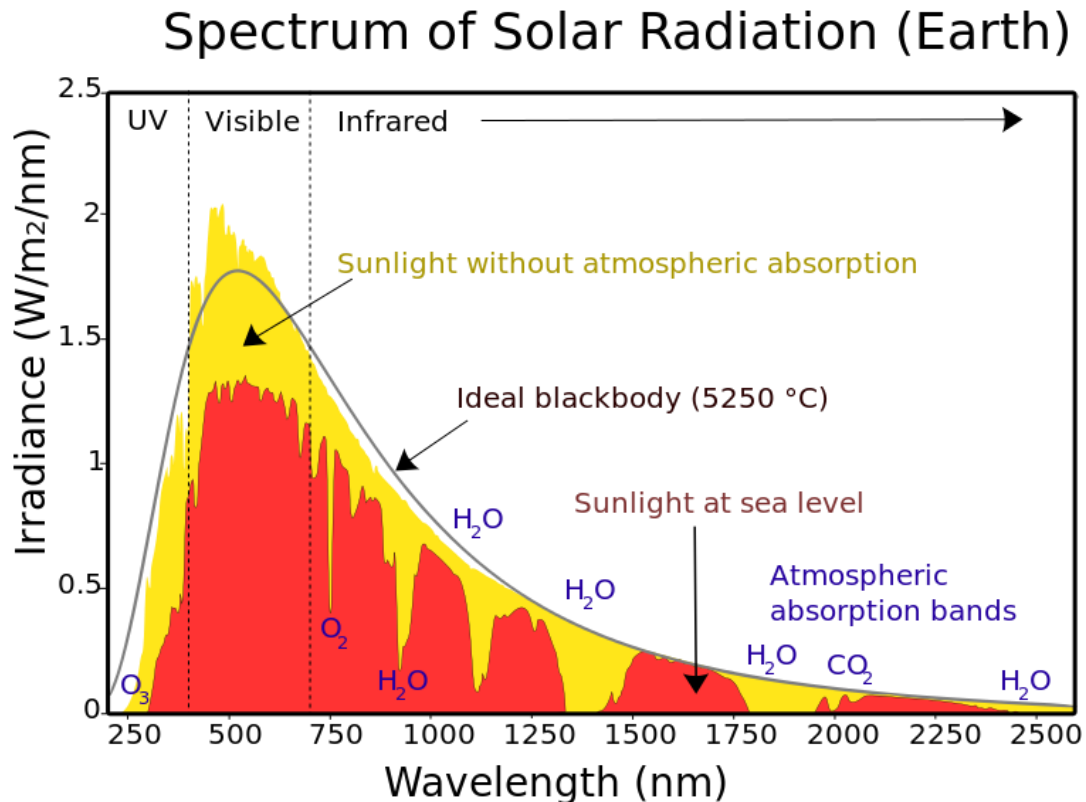
$$\frac{[P_s]_{\text{azul}}}{[P_s]_{\text{vermelho}}} = \left(\frac{700}{490}\right)^4 = 4.1649.$$

É claro que se poderia perguntar: não deveria, então, o céu ser (antes) violeta?

$$\frac{[P_s]_{\text{violeta}}}{[P_s]_{\text{vermelho}}} = \left(\frac{700}{400}\right)^4 = 9.3789$$

A resposta tem a ver com vários factores que (também) têm de ser tidos em consideração.

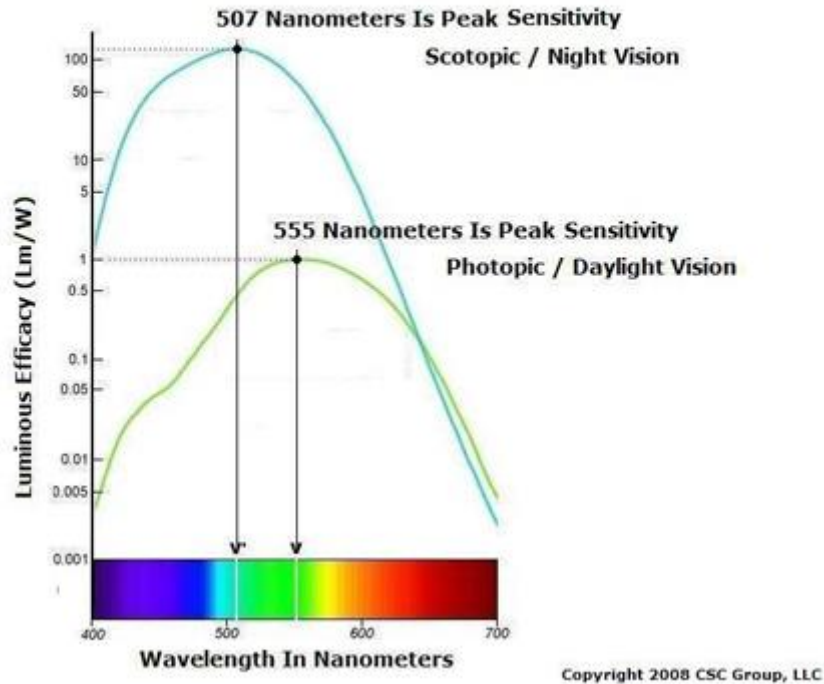
Em primeiro lugar: o espectro de radiação solar não é uniforme. Como indica a figura seguinte (retirada da wikipédia) a radiação solar é mais intensa no azul do que no violeta quando analisada na Terra.



Em segundo lugar: a sensibilidade do olho humano é maior na zona do azul do que na zona do violeta (quer de dia quer de noite) – tal como se pode verificar pela figura da página seguinte.

E qual a razão pela qual as nuvens são brancas ou cinzentas? A resposta, neste caso, tem a ver com a constituição do vapor de água condensado que existe nas nuvens: devido à condensação das moléculas do vapor de água, a densidade é maior do que na restante atmosfera e, conseqüentemente, existe um efeito de interferência coerente da fase, assim produzindo uma dispersão quase igualmente intensa em todas as regiões do visível – daí o branco ou cinzento (a diferença entre branco e cinzento é uma questão de luminância e não de cromaticidade).

SPECTRAL SENSITIVITY OF THE HUMAN EYE



“Now we can make an experiment that demonstrates this. We can make particles that are very small at first, and then gradually grow in size. We can make a solution of sodium thiosulfate (hypo) with sulfuric acid, which precipitates very fine grains of sulfur. As the sulfur precipitates, the grains first start very small, and the scattering is a little blueish. As it precipitates more it gets more intense, and then it will get whitish as the particles get bigger. In addition, the light which goes straight through will have the blue taken out. That is why the sunset is red, of course, because the light that comes through a lot of air, to the eye has had a lot of blue light scattered out, so it is yellow-red.”

Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics – Volume I: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat, The NEW MILLENNIUM Edition.* New York: Basic Books, 2010 (page 32-9)

Vamos, então, analisar de que forma aparece a dispersão de Rayleigh. Suponhamos que os electrões, de massa m_e e carga eléctrica $Q = -e$, oscilam nos átomos com a sua posição $x_\omega(t)$ determinada pela força de Newton $\mathbf{F}(t) = m_e \mathbf{a}_\omega(t)$, com

$$\mathbf{a}_\omega(t) = \frac{d^2 x_\omega}{dt^2} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}_\omega(t) = x_\omega(t) \hat{\mathbf{x}} = x_0 \cos(\omega t + \theta) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}(t) = Q \mathbf{E}_\omega(t) - k_m \mathbf{x}_\omega(t),$$

onde $\mathbf{x}_\omega(t)$ é o vector posição e $\mathbf{a}_\omega(t)$ é o vector aceleração. A força de Coulomb tem a forma $\mathbf{F}_c(t) = Q \mathbf{E}_\omega(t)$ à qual se opõe uma força mecânica $\mathbf{F}_m(t) = -k_m \mathbf{x}_\omega(t)$ em que k_m representa a constante elástica de “mola” que tenta levar o electrão até à sua posição de equilíbrio. Desprezamos, nesta análise, as colisões entre electrões. Admitamos, ainda, que o campo eléctrico – que perturba o electrão – tem a variação temporal

$$\mathbf{E}_\omega(t) = E_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} = \Re \{ E_0 \exp(-i\omega t) \} \hat{\mathbf{x}}.$$

Podemos escrever, então,

$$x_\omega(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta) = \Re \{ x_0 \exp(-i\theta) \exp(-i\omega t) \}.$$

Assim, tem-se

$$m_e \frac{d^2 x_\omega}{dt^2} = -e E_\omega(t) - k_m x_\omega(t) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x_\omega}{dt^2} + \omega_0^2 x_\omega(t) = -\frac{e}{m_e} E_\omega(t)},$$

onde se introduziu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_m}{m_e}}.$$

No domínio complexo, depois de eliminar o factor comum $\exp(-i\omega t)$, vem

$$-\omega^2 x_0 \exp(-i\theta) + \omega_0^2 x_0 \exp(-i\theta) = -\frac{e}{m_e} E_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = -\frac{e}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} E_0}$$

onde é possível fazer $\theta = 0$. Nestas condições, tira-se que

$$a_\omega(t) = \frac{d^2 x_\omega}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t) \Rightarrow a_\omega^2(t) = \omega^4 x_0^2 \cos^2(\omega t).$$

Porém, na fórmula de Larmor (onde o índice s vem do inglês *scattering* que traduzimos para dispersão ou, também, para espalhamento)

$$P_s = \frac{e^2 a^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3},$$

a aceleração a^2 corresponde ao valor médio (num período de oscilação harmónica):

$$a^2 = \langle a_o^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2 \Rightarrow P_s = \frac{e^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

Mas, por outro lado, tem-se

$$\omega^4 x_0^2 = \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \Rightarrow P_s = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi m_e^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Logo, como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

obtém-se a seguinte fórmula para a dispersão (ou espalhamento) da radiação:

$$P_s = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi m_e^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\lambda_0^4}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2}.$$

Na dispersão de Rayleigh tem-se

$$\omega_0 \gg \omega \Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 - \omega^2 \approx \omega_0^2 \\ \lambda^2 - \lambda_0^2 \approx \lambda^2 \end{cases}$$

donde se infere, finalmente, que

$$\boxed{\text{dispersão de Rayleigh}} \mapsto P_s = \left(\frac{e^4 E_0^2}{12\pi m_e^2 \varepsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{\omega^4}{\omega_0^4} \right) = \left(\frac{e^4 E_0^2}{12\pi m_e^2 \varepsilon_0 c^3} \right) \left(\frac{\lambda_0^4}{\lambda^4} \right).$$

Assim, efectivamente, obtém-se

$$\boxed{\text{dispersão de Rayleigh}} \mapsto \boxed{P_s \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}}$$

como se tinha dito atrás.

Frequentemente, define-se a *secção transversal de dispersão* (ou *espalhamento*) como sendo a área fictícia σ_s tal que

$$\boxed{P_s = \Sigma_0 \sigma_s},$$

onde Σ_0 é a densidade do fluxo de potência incidente, em $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, tal que

$$\boxed{\Sigma_0 = \frac{E_0^2}{2\eta_0}},$$

como se identificou na página 3. Logo, usando a expressão geral para a potência dispersa, resulta que a secção transversal de dispersão (ou espalhamento) é dada por

$$\sigma_s = \left(\frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m_e^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2.$$

Então, introduzindo o chamado raio clássico do electrão, tal que

$$\boxed{\text{raio clássico do electrão}} \mapsto \boxed{r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8179403267(27) \times 10^{-15} \text{ m}},$$

a secção transversal de dispersão ainda se pode reescrever na forma

$$\boxed{\text{secção transversal de dispersão}} \mapsto \boxed{\sigma_s = \frac{8\pi r_e^2}{3} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2}.$$

No caso das frequências muito baixas (ou quando se pode considerar que os electrões se encontram livres), é possível desprezar ω_0^2 e obtém-se a chamada secção transversal de dispersão de Thompson que não depende da frequência:

$$\boxed{\text{secção transversal de dispersão de Thompson}} \mapsto \boxed{\sigma_s = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 6.652458734\dots \times 10^{-29} \text{ m}^2}.$$

O raio clássico do electrão r_e é também expresso, frequentemente, na forma

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \\ \lambda_e = \frac{h}{m_e c} \end{array} \right] \mapsto \boxed{r_e = \frac{\alpha \lambda_e}{2\pi}} \mapsto (\sigma_s)_{\text{Thompson}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha \lambda_e}{2\pi} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\alpha \hbar c}{m_e c^2} \right)^2$$

em que α é a constante de estrutura fina e λ_e o comprimento de onda de Compton do electrão. Tem-se (grandeza adimensional)

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} = 137.035999074(44)}.$$

Como sempre h é a constante de Planck e $\hbar = h/2\pi$ (h traçado) a constante reduzida de Planck.

$$\left[\begin{array}{l} h = 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \\ \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,800(13) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \end{array} \right]$$

No caso da dispersão de Rayleigh, portanto, será

$$\boxed{\text{secção transversal de dispersão de Rayleigh}} \mapsto \sigma_s = \left(\frac{8\pi r_e^2}{3\omega_0^4} \right) \omega^4 = \left(\frac{8\pi r_e^2 \lambda_0^4}{3} \right) \left(\frac{1}{\lambda^4} \right).$$

É esta última expressão que permite explicar a cor azulada do céu. É válida quando o comprimento de onda da radiação incidente (e dispersa) λ é incomensuravelmente maior do que a dimensão típica das partículas atmosféricas dispersoras – condição para a aplicabilidade da dispersão de Rayleigh.

NOTA (Índice de refração) – O modelo aqui deduzido para a dispersão é, mesmo no caso geral, muito aproximado e permite, apenas, uma estimativa grosseira – apesar de permitir explicar qualitativamente o azul do céu. Trata-se, na realidade, do modelo clássico de Lorentz para o electrão em que se desprezaram as colisões entre electrões. Na análise quântica há que incluir não só as colisões (que, de resto, podem facilmente ser incluídas no modelo de Lorentz) mas também a existência de várias frequências de ressonância (mesmo no caso do hidrogénio com átomos que apenas possuem um electrão).

No modelo de Lorentz as colisões entre electrões são introduzidas através da frequência Γ de colisões. Neste caso há que introduzir a contribuição

$$\boxed{\text{atrito}} \mapsto \boxed{\mathbf{F}_a = -\Gamma m_e \mathbf{v}_\omega(t)}.$$

Portanto, virá

$$\mathbf{F}(t) = m_e \mathbf{a}_\omega(t) = Q \mathbf{E}_\omega(t) - k_m \mathbf{x}_\omega(t) - \Gamma m_e \mathbf{v}_\omega(t),$$

obtendo-se

$$x = x_0 \exp(-i\theta) = -\frac{e}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} E_0.$$

Agora *não* é possível fazer $\theta = 0$ (como quando $\Gamma = 0$), i.e., tem de se fazer

$$x_\omega(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta) = \Re \{ x \exp(-i\omega t) \},$$

em que

$$x = x_0 \exp(-i\theta) = x' + i x'' \in \mathbb{C}.$$

Nomeadamente, vem

$$\begin{cases} x' = \Re \{ x \} = -\frac{e}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2 \right]^{1/2}} E_0 \\ x'' = \Im \{ x \} = -\frac{e}{m_e} \frac{\omega \Gamma}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2 \right]^{1/2}} E_0 \end{cases}$$

Em geral define-se

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon = 1 + \chi \end{cases}$$

em que \mathbf{P} é o vector da polarização, χ é a susceptibilidade eléctrica do material dieléctrico e ε a correspondente permitividade dieléctrica relativa (ε e χ são adimensionais). O *índice de refração* n do dieléctrico é, então, definido como

$$\boxed{\text{índice de refração}} \mapsto \boxed{n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \chi}}.$$

Sendo N_b a densidade volúmica de electrões ligados (pela constante k_m) ao átomo, será

$$\mathbf{P}_\omega(t) = -e N_b \mathbf{x}_\omega(t) \mapsto P_\omega(t) = \Re \{ P \exp(-i\omega t) \} \mapsto P = -e N_b x \in \mathbb{C}$$

$$\therefore P = (-eN_b) \left[-\frac{e}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} E_0 \right] = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{e^2 N_b}{\varepsilon_0 m_e} \right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \right] E_0 = \varepsilon_0 \chi(\omega) E_0.$$

Conclui-se daqui que

$$\boxed{\text{susceptibilidade el\u00e9trica}} \mapsto \boxed{\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}}$$

onde se introduziu a chamada *frequ\u00eancia de plasma*

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N_b}{\varepsilon_0 m_e}}.$$

Nestas condi\u00e7\u00f5es, o \u00edndice de refrac\u00e7\u00e3o $n = n(\omega)$ do diel\u00e9trico (n\u00e3o magn\u00e9tico) \u00e9 tal que

$$\boxed{\text{\u00edndice de refrac\u00e7\u00e3o}} \mapsto \boxed{n = n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}} \mapsto \boxed{n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}}.$$

Se se introduzirem as vari\u00e1veis normalizadas (adimensionais)

$$\boxed{\text{frequ\u00eancias normalizadas}} \mapsto \begin{cases} \Omega = \frac{\omega}{\omega_p} \\ \Omega_0 = \frac{\omega_0}{\omega_p} \\ \kappa = \frac{\Gamma}{\omega_p} \end{cases}$$

\u00e9 poss\u00edvel escrever

$$\boxed{n^2(\Omega) = \varepsilon(\Omega) = 1 + \frac{1}{\Omega_0^2 - \Omega^2 - i\kappa\Omega}}.$$

Fazendo

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ n = n' + in'' \end{cases} \Rightarrow n^2 = [(n')^2 - (n'')^2] + 2in'n'' = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

resulta

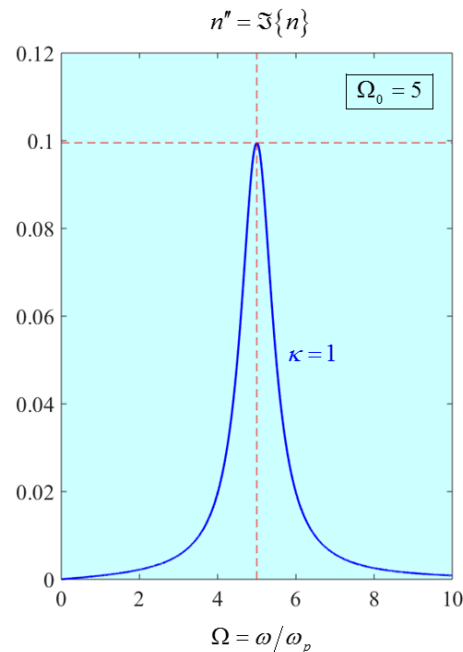
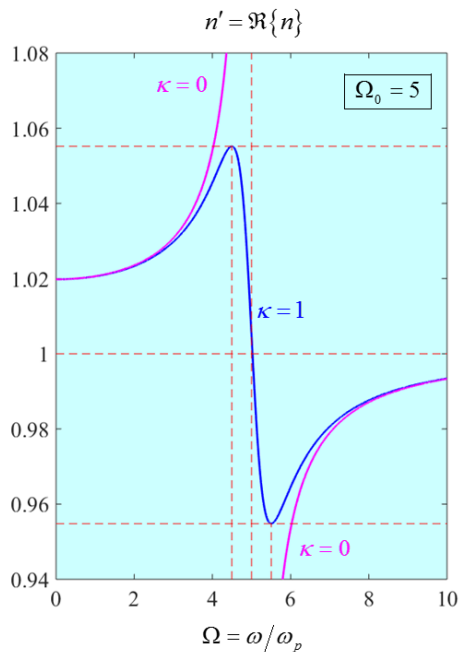
$$\begin{cases} \varepsilon' = \Re \{ \varepsilon \} = (n')^2 - (n'')^2 = 1 + \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \kappa^2 \Omega^2} \\ \varepsilon'' = \Im \{ \varepsilon \} = 2n'n'' = \frac{\kappa \Omega}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \kappa^2 \Omega^2} \end{cases}$$

Assim, como tem de ser $\varepsilon'' > 0$ e $n'' > 0$ (o meio é passivo), tira-se que

$$n' = \Re \{ n \} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\varepsilon' + \sqrt{(\varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} \right]^{1/2}, \quad n'' = \Im \{ n \} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{n'}$$

Nas duas figuras seguintes representam-se graficamente $n' = \Re \{ n \}$ e $n'' = \Im \{ n \}$ em função da frequência normalizada $\Omega = \omega / \omega_p$. Considera-se $\Omega_0 = 5$ (i.e., $\omega_0 = 5 \omega_p$) e $\kappa = 1$ (i.e., $\Gamma = \omega_p$). No caso $\kappa = 0$, obtém-se simplesmente $n'' = 0$ e ainda

$$\boxed{\Gamma = 0} \mapsto \boxed{n = n' = \sqrt{1 + \frac{1}{\Omega_0^2 - \Omega^2}}}$$



NOTA IMPORTANTE – A potência radiada, na fórmula de Larmor, é dada por

$$P_{\text{rad}} = \frac{Q^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3}.$$

Podemos associar o sistema radiativo a um oscilador harmónico. O factor de qualidade Q deste sistema ressonante é, por definição,

$$\text{factor de qualidade} \mapsto Q = \frac{\mathcal{E}}{d\mathcal{E}/d\phi}$$

em que \mathcal{E} representa a energia total armazenada e $d\mathcal{E}/d\phi$ a taxa de diminuição da energia por radiano. Este amortecimento da energia pode ser analisado no tempo:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\phi} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \frac{dt}{d\phi}.$$

Mas, como

$$\exp(i\phi) = \exp(-i\omega t) \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\omega,$$

infere-se que

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\phi} = -\frac{1}{\omega} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \Rightarrow Q = \frac{\omega \mathcal{E}}{|d\mathcal{E}/dt|}$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\omega \mathcal{E}}{Q} \Rightarrow \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{\omega}{Q} t\right)$$

em que se tem $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_0$. Mas então, deverá ter-se

$$P_{\text{rad}} = \left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right| \Rightarrow \frac{1}{Q} = \frac{P_{\text{rad}}}{\omega \mathcal{E}}.$$

Logo, substituindo nesta última expressão a fórmula de Larmor (com $x_0 > 0$)

$$P_{\text{rad}} = \frac{Q^2 \langle a^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}, \quad v_0 = \omega x_0, \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} m_e \omega^2 x_0^2,$$

obtém-se

$$\frac{1}{Q} = \frac{e^2 \omega}{6\pi m_e \epsilon_0 c^3} = \frac{e^2}{3m_e \epsilon_0 c^2 \lambda} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{Q} = \frac{4\pi}{3\lambda} \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \right)}.$$

Na última expressão o termo entre parêntesis tem de ter a dimensão de comprimento pois Q é adimensional. Esse comprimento é, por definição, o raio clássico r_e do electrão. Assim

$$\boxed{\frac{1}{Q} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda}}.$$

Quando se introduz a frequência de colisões Γ podemos então escrever

$$\boxed{\Gamma = \frac{P_{\text{rad}}}{\mathfrak{E}}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{Q} = \frac{P_{\text{rad}}}{\omega \mathfrak{E}} = \frac{\Gamma}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega}}.$$

Porém, como

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2} = -\frac{\lambda}{\omega} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\omega}{\omega}},$$

para pequena largura espectral. Assim, infere-se que

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Q}}.$$

Conclusão: as colisões conduzem a *perdas* representadas pela frequência Γ que, por sua vez, traduzem a diminuição de energia radiada pelo sistema ressonante cujo factor de qualidade é Q ; a largura $\Delta\lambda$ das riscas espectrais de radiação traduz esse *amortecimento da radiação*. A largura $\Delta\lambda$ é então dada por λ/Q , pelo que um valor *mais* elevado do factor de qualidade implica riscas espectrais *mais* estreitas para a emissão atómica. No limite, quando $\Gamma \rightarrow 0$ e $Q \rightarrow \infty$, a emissão radiativa P_{rad} seria rigorosamente monocromática, com frequência ω , correspondente a uma risca espectral de espessura nula, i.e., o espectro de radiação teria a forma $\delta(\omega)$ de um delta de Dirac.